Séquence 7 : TRIANGLES SEMBLABLES & PARALLELISME ET ANGLES

Objectifs du chapitre :

- Caractériser le parallélisme avec les angles
- Cas d'égalité des triangles – Triangles semblables

I) Quelques rappels utiles

1) Inégalité triangulaire

Soient A, B et C trois points du plan:

Si $B \in [AC]$ alors $AC = AB + BC$ *Figure :*	Si $B \notin [AC]$ alors $AC < AB + BC$ *Figure :*

Propriété :

Dans un triangle, **la longueur d'un côté** est toujours **inférieure** à la **somme des longueurs des deux autres côtés.**

Lorsqu'il y a égalité, les trois points sont alignés.

Remarque : Pour vérifier si on peut construire un triangle, il suffit de vérifier que la plus grande longueur est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés

Exemples

Peut-on construire un triangle dont les côtés mesurent 3cm, 5cm et 6cm ?

On vérifie bien que la plus grande longueur est inférieure à la somme des 2 autres : 6 < 5+3

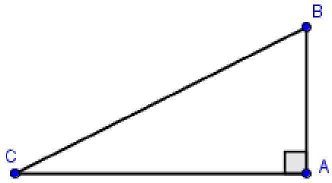
Peut-on construire un triangle dont les côtés mesurent 2cm, 4cm et 7cm ?

Ici 7 > 2 + 4 donc il n'est pas possible de construire ce triangle

2) Somme des angles d'un triangle

Rappel : La somme des mesures des 3 angles d'un triangle est égale à 180°

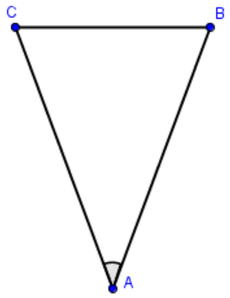
Dans le triangle rectangle



On a $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$

Puisque $\hat{A} = 90°$, on a alors $\hat{B} + \hat{C} = 90°$

Dans le triangle isocèle



Rappel : Les 2 angles à la base d'un triangle isocèle sont de même mesure.

Le triangle ABC est isocèle en A donc $\hat{B} = \hat{C}$

Donc $\hat{B} = \hat{C} = \frac{180 - \hat{A}}{2}$ ou bien $\hat{A} = 180 - (2 \times \hat{B})$

Dans le triangle équilatéral

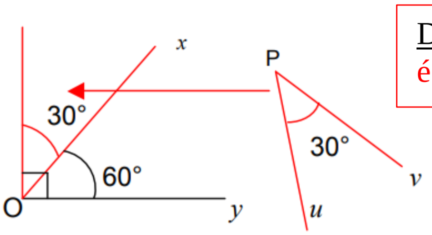
Le triangle ABC est équilatéral donc $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$

Donc $\hat{A} = \frac{180}{3} = 60°$

Propriété : Les 3 angles d'un triangle équilatéral mesurent 60°

3) Angles complémentaires et angles supplémentaires

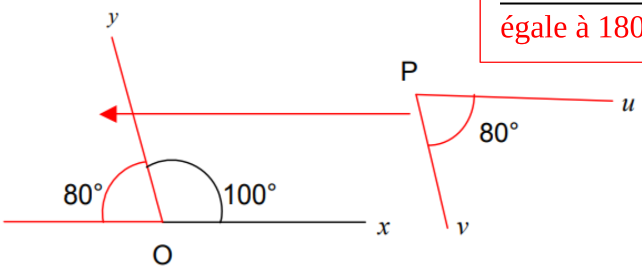
1)



$\widehat{xOy}$ et $\widehat{uPv}$ sont complémentaires.

Définition : Deux angles dont la somme des mesures est égale à 90° sont COMPLEMENTAIRES.

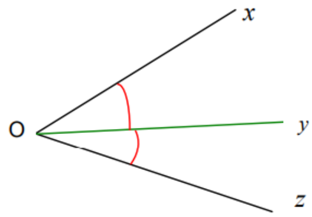
2)



$\widehat{xOy}$ et $\widehat{uPv}$ sont supplémentaires.

Définition : Deux angles dont la somme des mesures est égale à 180° sont SUPPLEMENTAIRES.

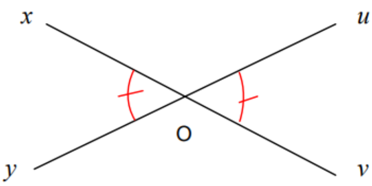
4) Angles adjacents



Définition : Deux angles ayant le même sommet, un côté commun et situés de part et d'autre de ce côté commun sont ADJACENTS.

$\widehat{xOy}$ et $\widehat{yOz}$ sont adjacents.

5) Angles opposés par le sommet



Définition : Deux angles dont leurs côtés sont dans le prolongement l'un de l'autre sont OPPOSES PAR LE SOMMET.

$\widehat{xOy}$ et $\widehat{uOv}$ sont opposés par le sommet.

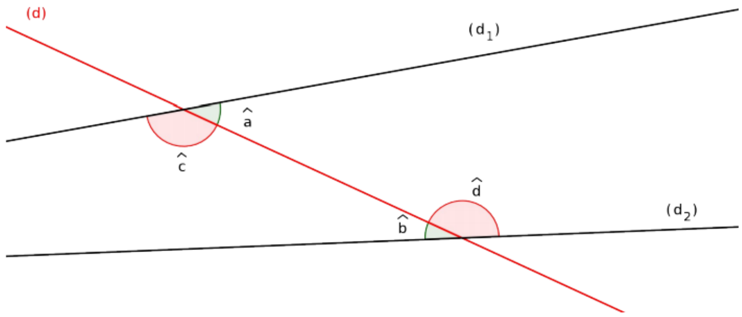
Propriété 1 : Si deux angles sont opposés par le sommet alors ils ont la même mesure

Découverte par Thalès de Milet (-625 ;-547)

II) ANGLES ALTERNES-INTERNES ET ANGLES CORRESPONDANTS

1) Angles alternes-internes vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=v7XmtQhOP9I

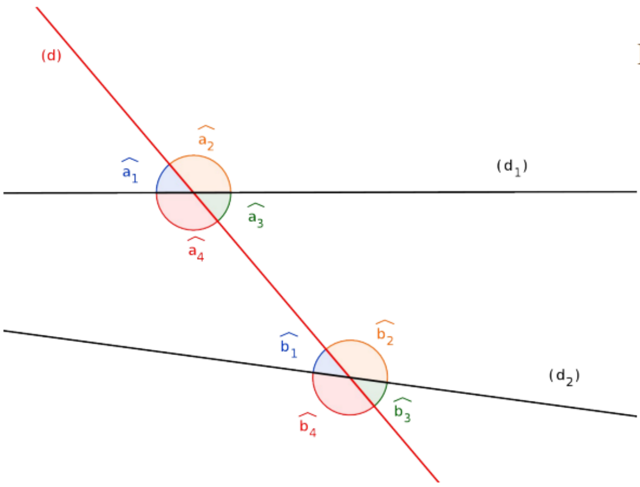
Définition : Lorsque deux droites sont coupées par une sécante, dire que deux angles non adjacents sont **alternes-internes** signifie qu'ils sont situés :
- de part et d'autre de la sécante ;
- à l'intérieur de la bande formée par les deux droites.



Les deux paires d'angles alternes-internes sont :
$\hat{a}$ et $\hat{b}$ d'une part ;
$\hat{c}$ et $\hat{d}$ d'autre part.

2) Angles correspondants

Définition : Lorsque deux droites sont coupées par une sécante, dire que deux angles non adjacents sont **correspondants** signifie que :
- ils sont situés du même côté de la sécante ;
- un seul des deux angles est situé dans la bande formée par les deux droites

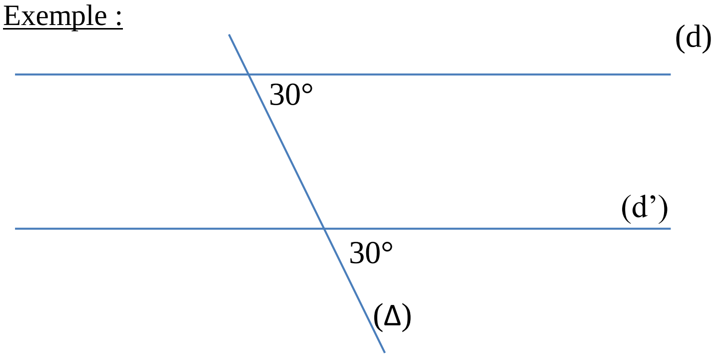


Les quatre paires d'angles correspondants sont :
$\widehat{a_1}$ et $\widehat{b_1}$; $\widehat{a_2}$ et $\widehat{b_2}$; $\widehat{a_3}$ et $\widehat{b_3}$; $\widehat{a_4}$ et $\widehat{b_4}$.

3) Parallélismes et angles

Propriété 2 : Si deux droites parallèles sont coupés par une troisième, alors les angles alternes-internes sont égaux et les angles correspondants sont égaux.
Propriété 3 (réciproque du 2): Si deux angles alternes-internes sont égaux (ou deux angles correspondants sont égaux) alors les droites sur lesquelles ils reposent sont parallèles.

Exemple :



Je sais que (d) et (d') sont coupées par (Δ) en formant 2 angles $\hat{a}$ et $\hat{b}$ correspondants égaux à 30°
Donc (d) // (d')

III) Triangles égaux, triangles semblables

1) Triangles égaux vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=RsIqGBUWbP8

Définition : Deux triangles sont égaux lorsque leurs côtés sont deux à deux de même longueur

Propriété : Deux triangles égaux ont leurs angles deux à deux de même mesure.

Informations nécessaires à la construction de triangles égaux : Voir l'activité dans le cahier d'exercice

2) Triangles semblables Vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=F3SuRBTkaGM

Définition : Deux triangles sont semblables si leurs angles sont deux à deux de même mesure.

Propriété : Deux triangles ABC et A'B'C' sont semblables si et seulement si les longueurs de leurs côtés sont proportionnelles.

Remarque: Des triangles égaux sont semblables. Par contre deux triangles semblables ne sont pas obligatoirement égaux

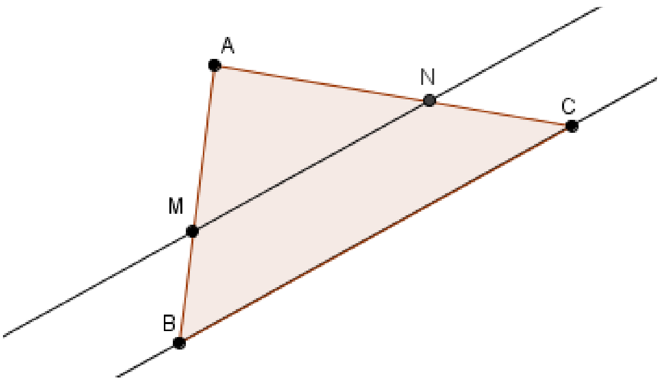
3) Théorème de Thalès vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=zP16D2Zrv1A

Propriété :
Dans un triangle ABC, si M est un point du côté [AB], N un point du côté [AC] et si les droites (MN) et (BC) sont parallèles, alors les triangles AMN et ABC sont semblables.

Longueurs du triangle AMN	AM	AN	MN
Longueurs du triangle ABC	AB	AC	BC

Conséquence 1 : Le tableau des longueurs ci-dessus est un tableau de proportionnalité.

Conséquence 2 : Les rapports $\frac{AM}{AB}, \frac{AN}{AC}, \frac{MN}{BC}$ sont égaux.



Hypothèses : M est un point de [AB]
N est un point de [AC]
(MN)//(BC)

Conclusion : $\frac{\text{AM}}{\text{AB}} = \frac{\text{AN}}{\text{AC}} = \frac{\text{MN}}{\text{BC}}$

En effet :

Les droites (MN) et (BC) sont parallèles et les angles $\widehat{ANM}$ et $\widehat{ACB}$ sont correspondants : On a donc $\widehat{ANM} = \widehat{ACB}$

Les droites (MN) et (BC) sont parallèles et les angles $\widehat{AMN}$ et $\widehat{ABC}$ sont correspondants : On a donc $\widehat{AMN} = \widehat{ABC}$

Ainsi, les triangles AMN et ABC ont leurs angles égaux deux à deux : Ils sont donc semblables

D'après la propriété du II 2), leurs longueurs sont donc proportionnelles.

https://www.youtube.com/watch?v=U9XX5w8FeOI