

Chapitre 10 : Arithmétique

I - Divisibilité

1 - Rappels : critère de divisibilité

Un nombre entier est divisible :

- par 2, si son chiffre des unités est pair,
- par 5, si son chiffre des unités est 0 ou 5,
- par 10, si son chiffre des unités est 0,
- par 3, si la somme de ses chiffres est divisible par 3,
- par 9, si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

Exemple :

15 est divisible par 3 et par 5.

On dit que 3 et 5 sont des **diviseurs** de 15.

On dit également que 15 est un **multiple** de 3 ou de 5.

1074 est divisible par 3

Car $1 + 0 + 7 + 4 = 12$ qui est divisible par 3.

Méthode : Reconnaître un multiple ou un diviseur d'un nombre

Vidéo : <https://youtu.be/-PLZFLAG99Q>

- Parmi les nombres suivants, trouver le(s) multiple(s) de 14 : 56, 141 et 280

Les multiples successifs de 14 sont : 14, 28, 42, 56, ... 140, 154, ... 280, ...

On reconnaît que 56 est un multiple de 14.

On reconnaît facilement que 140 est un multiple de 14 car $14 \times 10 = 140$. Donc 141 n'est pas un multiple de 14.

On reconnaît également que 280 est un multiple de 14 car $14 \times 20 = 280$.

On en déduit que 56 et 280 sont des multiples de 14.

- Dresser la liste des diviseurs de 28.

1, 2, 4, 7, 14, 28.

L'astuce est de les chercher par couple. Par exemple, 2 divise 28 donc 14 divise également 28 car $2 \times 14 = 28$.

- Parmi les nombres 2, 3, 5, 9 et 10, déterminer les diviseurs de 456.

2 divise 456 car 456 est pair.

3 divise 456 car $4 + 5 + 6 = 15$ qui est divisible par 3.

5 ne divise pas 456 car 456 ne se termine pas par 0 ou 5.

9 ne divise pas 456 car $4 + 5 + 6 = 15$ qui n'est pas divisible par 9.

10 ne divise pas 456 car 456 ne se termine pas par 0.

2 - Nombres premiers

Définitions :

- Un nombre est **premier** s'il possède exactement deux diviseurs qui sont 1 et lui-même.
- Liste des nombres premiers inférieurs à 30 : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29

Remarques :

- Cette liste est infinie.

- Le nombre 1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur.

II - Application aux fractions

1 - Décomposition d'un nombre en produits de facteurs premiers

Exemple :

$20 = 2 \times 2 \times 5$ est une décomposition du nombre 20 en produits de facteurs premiers.

En effet, chaque facteur de la décomposition est un nombre premier.

$$231 = 3 \times 7 \times 11$$

$$225 = 3 \times 3 \times 5 \times 5$$

Méthode : Décomposer un nombre en produits de facteurs premiers

Vidéo : https://youtu.be/BlGaIqNz_pk

Décomposer 84 en produits de facteurs premiers.

Pour le faire, il est important de bien connaître le début de la liste des nombres premiers :
2, 3, 5, 7, 11, 13, ...

On commence par tester si 84 est divisible par 2 (1er nombre premier).

La réponse est "oui" car 84 se termine par un chiffre pair.

Et on a : $84 : 2 = 42$

$$\begin{array}{r|l} 84 & 2 \\ 42 & \end{array}$$

On recommence, en testant si 42 est divisible par 2.

La réponse est "oui" et $42 : 2 = 21$

$$\begin{array}{r|l} 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & \end{array}$$

On recommence, en testant si 21 est divisible par 2.

La réponse est "non" !

On teste alors le nombre premier suivant dans la liste.

Est-ce que 21 est divisible par 3.

$$\begin{array}{r|l} 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & \end{array}$$

La réponse est "oui".

Et on a : $21 : 3 = 7$

7 est un nombre premier divisible uniquement par 1 et lui même.

$$\begin{array}{r|l} 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Et on a $7 : 7 = 1$

C'est fini, on trouve 1 !

La décomposition en facteurs premiers de 84 se lit dans la colonne de droite.

$$84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7$$

2) Fractions égales

Méthode : Déterminer des fractions égales

Vidéo : <https://youtu.be/HkqUaPYgwQM>

Simplifier la fraction $\frac{153}{85}$

Pour simplifier une fraction, il faut décomposer son numérateur et son dénominateur en produits de facteurs premiers.

$$\begin{array}{r|l} 153 & 3 \\ 51 & 3 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 85 & 5 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array}$$

On a ainsi les décompositions de 153 et 85 :

$$153 = 3 \times 3 \times 17 \text{ et } 85 = 5 \times 17$$

$$\text{donc : } \frac{153}{85} = \frac{3 \times 3 \times 17}{5 \times 17} = \frac{3 \times 3}{5} = \frac{9}{5}$$